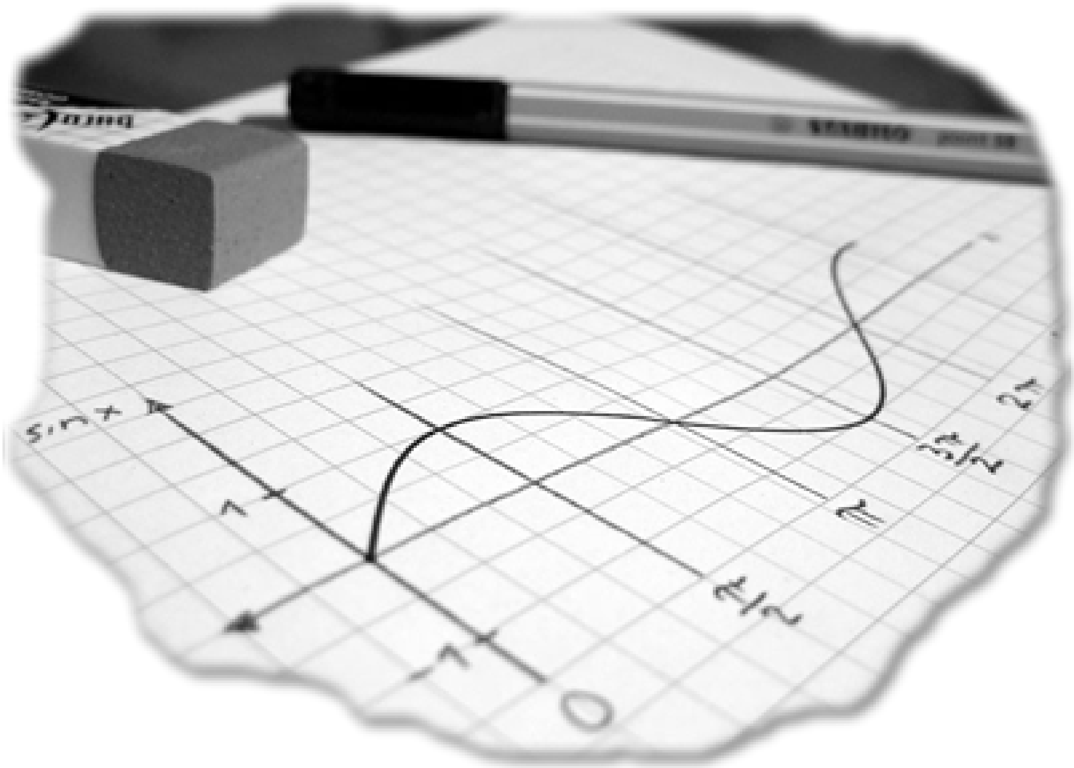
Hvad elektrikeren bør vide om:

komplekse tal

Vekselstrømsteori.

Stedvektorer og komplekse tal



En indledning til avanceret (fag)matematik.

1. udgave november 2008

Forord

Kompendiet er udarbejdet som et *valgfrit* supplement til den ordinære undervisning på den erhvervsfaglige indgang **strøm, styring & it** på EUC Nordvest, hvor elever skal undervises i grundlæggende vekselstrømsteori, hvis de i slutningen af det erhvervsfaglige grundforløb vælger specialeretning som elektriker.

For at kunne få et udbytte af dette kompendium, forudsættes det, at læseren allerede har tilegnet sig en grundlæggende forståelse for vekselstrømsteorien, de tilknyttede begreber samt ”traditionelle” beregningsmetoder. Dog kan en læser uden elektroteknisk indsigt sagtens få et lærerigt udbytte af den grundlæggende teori bag de komplekse tal og de tilhørende beregningsmetoder, som er behandlet i dette kompendium.

Beregninger af strøm-, spændings- og impedansforhold i elektriske kredsløb tilsluttet en vekselspænding kan sagtens udføres uden at anvende de i kompendiet angivne beregnings-metoder med komplekse tal og stedvektorer. Men for elever, der ønsker at arbejde med matematikken i emnet, vil de heri beskrevne beregningsmetoder være et anbefalingsværdigt studie, da en grundlæggende forståelse for de komplekse tal kan være en uvurderlig hjælp ved beregninger omkring forholdene mellem strøm, spænding og impedans i elektriske kredsløb tilsluttet en vekselspænding.

Der er i kompendiet medtaget et eksempel på den ”traditionelle” beregning af forholdene i et vekselstrømskredsløb. I denne beregning er ”normale” matematiske regneoperationer som Pythagoras’ læresætning og de basale trigonometriske funktioner (sinus, cosinus) anvendt.
Til sammenligning er det samme kredsløb beregnet ved hjælp af komplekse tal.

Teorien omkring stedvektorerne, de komplekse tal, notationsformer samt regneregler er i kompendiet indledningsvist beskrevet på et grundlæggende niveau. Senere i kompendiet er foretaget en tilpasning således, at beregningsmetoderne kan anvendes i forbindelse med vekselstrømsteorien og de tilhørende beregninger på elektriske kredsløb.

Er man ”den lykkelige ejer” af en avanceret lommeregner (fx Texas Instruments TI-86), der kan håndtere komplekse regneoperationer, vil de komplekse beregninger være meget nemme at udføre. De angivne beregninger kan dog sagtens foretages med en ”normal” lommeregner, den skal dog kunne regne med de trigonometriske regnefunktioner (cosinus, sinus og tangens), – det vil være lidt mere besværligt, så der bliver behov for lidt tålmodighed.

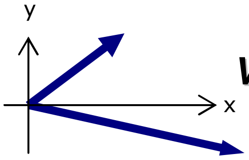
Gennemgangen af teorien omkring de komplekse tal er begrænset til de regneoperationer, der kan anvendes ved elektriske beregninger og kompendiet kan derfor *ikke* betragtes som en fuldstændig gennemgang af de komplekse tal. Elever, der måtte ønske at erhverve yderligere viden omkring de komplekse tal og deres anvendelsesmuligheder ud over det i kompendiet berørte teoretiske materiale, henvises til at opsøge denne viden andetsteds.

God fornøjelse med den videre læsning.

November 2008

Peter Valberg

Faglærer
strøm, styring & it
EUC Nordvest, DK 7700 Thisted
pvm@eucnordvest.dk

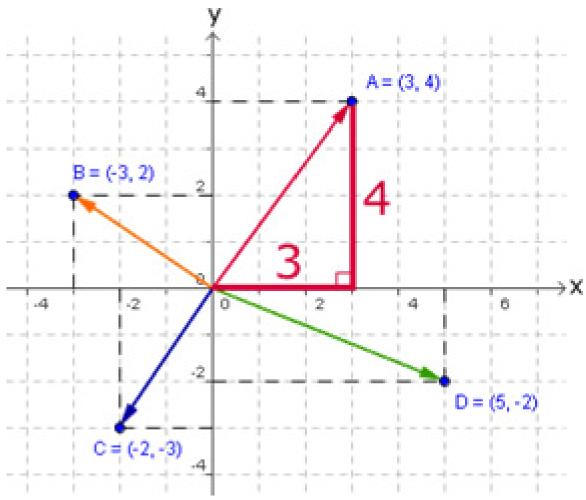


Vekselstrømsteori, stedvektorer og komplekse tal

Generelt om stedvektorer

Stedvektoren for et givet *punkt* er en vektor fra *origo* i et retvinklet koordinatsystems til det givne punkt, - origo er koordinatsystemets nulpunkt (0,0).
Der er således en direkte sammenhæng mellem stedvektoren og punktet i koordinatsystemet.
I det retvinklede koordinatsystem bliver længden af stedvektorens komposanter (hvilket er stedvektorens projektion på henholdsvis x-aksen og y-aksen) det samme som det pågældende punkts koordinater (x,y). I visse matematiske fagbøger angives koordinater på formen (x|y).
Grunden til anvendelsen af stedvektorer er, at det i visse sammenhænge kan være bekvemt at lade punkter i koordinatsystemet være repræsenteret af stedvektorer.

Alle punkter i koordinatsystemet kan opfattes som en skæring mellem rette linjer parallelle med akserne, hvorved der opstår en retvinklet trekant for alle punkter (*som det ses på illustrationen til højre*).



Det retvinklede koordinatsystem er det mest udbredte i praktiske sammenhænge, da det er lettest tilgængeligt og relativt nemt at forholde sig til.

Afhængig af sammenhængen bruges det enten i to eller tre dimensioner (den tredje akse benævnes **z**).

Et traditionelt retvinklet koordinatsystem kaldes også for et *kartesiske* koordinatsystem – se eventuelt ”Links” side 29.

Stedvektorer og vekselstrømskredsløb

Ved beregninger på vekselstrømskredsløb kan tegnes diagrammer med stedvektorer som erstatning for strøm- og spændingskurver. En stedvektor angives (ligesom en kraft) i en bestemt længde og en bestemt retning, idet retningen fastlægges i forhold til en valgt referencelinje (0°). Stedvektorernes *positive* omdrejningsretning er altid venstre om (mod uret).

I vekselstrømsteorien kan vektorbegrebet være et nyttigt hjælpemiddel ved beregninger.
Almindeligvis er det strømmenes og spændingernes effektivværdier, der benyttes i det aktuelle stedvektordiagram over et givent kredsløb.
Hvis flere stedvektorer skal sammensættes, kan de med fordel tegnes i samme målestoks-forhold, hvorefter vektorerne sammenlægges i en resulterende vektor, der angiver den vektorielle sum af vektorerne. Vektorerne kan under sammenlægningen forskydes efter behov (flyttes), så længe deres længde og retning ikke ændres (dette er meget vigtigt).
Alle spændingsvektorer skal således afsættes med samme antal volt pr. længdeenhed, ligesom alle strømvektorer skal have samme skala i ampere pr. længdeenhed.
Dette giver muligheden for at ”beregne” resultatet grafisk, da man direkte kan måle resultatet som længden af den resulterende stedvektor (hvis man har anvendt de korrekte vinkler og indbyrdes størrelsesforhold).

Fortsættes næste side…

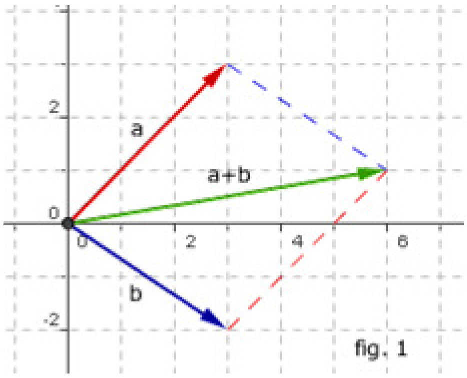
Grafisk addition og subtraktion af stedvektorer

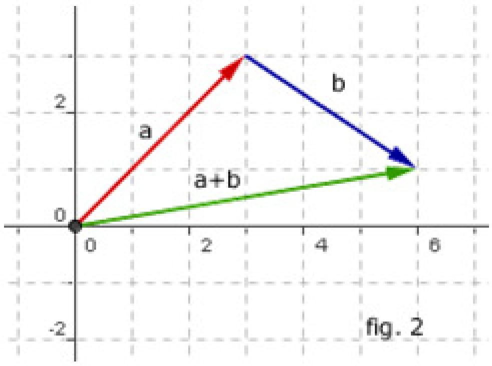
Sammenlægning (addition) af stedvektorer kan ske *grafisk* som vist i fig. 1 og 2.

I fig. 1 er stedvektorerne $\overline{a}$ og $\overline{b}$ tegnet ud fra samme punkt og danner et parallelogram, hvor den resulterende stedvektor $\overline{a} + \overline{b}$ er diagonalen i parallelogrammet med udgangspunkt (0,0).

I fig. 2 er stedvektor $\overline{b}$ parallelforskudt således, at dets udgangspunkt nu er "enden" af stedvektor $\overline{a}$. Stedvektor $\overline{b}$ har beholdt samme længde og retning (vinkel if. vandret). Stedvektorerne er med andre ord tegnet i forlængelse af hinanden, - som det ses, er resultatet det samme som i fig. 1.

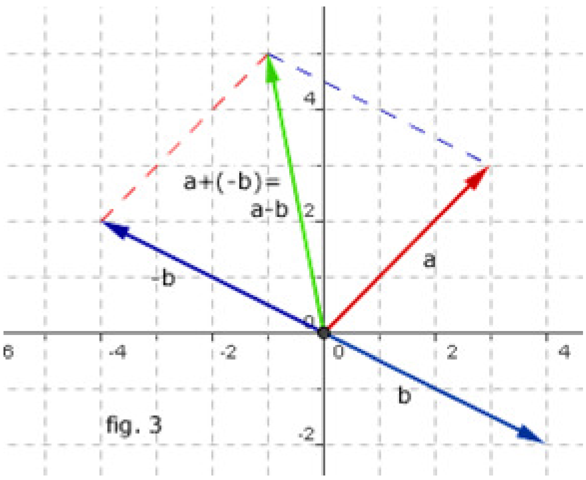
Begge metoder kan anvendes ved *grafisk* addition af to eller flere stedvektorer.





Subtraktion sker som ved addition, idet der gøres brug af, at en stedvektor, der multipliceres med – 1 (minus 1) beholder uændret længde, men blot får "pilen i den anden ende".
Hvorefter stedvektorerne kan adderes som vist i fig. 3.
Udtrykket er da blot $\overline{a} + (- \overline{b})$ i stedet for $\overline{a} - \overline{b}$.
Stregen/pilen henover a og b kan bruges for at "understrege", at det er en stedvektor.
I fig. 3 er metoden med parallelogram benyttet, men metoden med parallelforskydning af vektorerne kan sagtens anvendes i stedet.

I elektrotekniske sammenhænge anvendes ofte (sted)vektordiagrammer for strømme, spændinger og impedanser i det aktuelle kredsløb som en understøttende "skitse" for de trigonometriske beregninger.
(se eksemplerne sidst i dokumentet).



Reelle, imaginære og komplekse tal

Det reelle talsystem omfatter tallene i talmængden $\mathbb{R}$.
Denne talmængde er sammensat af alle hele tal (fx -7, 0, 4...), alle rationelle tal (brøkerne) samt alle irrationelle tal ($-\sqrt{9}, \sqrt{16}, \pi...$). Disse tal kan alle vises på en vandret tallinje.

Det imaginære talsystem (den tilhørende talmængde kan benævnes med $\mathbb{I}$) udvider det reelle talsystem $\mathbb{R}$ til det komplekse talsystem $\mathbb{C}$.

Den *imaginære enhed* i er således "grundstenen" for de imaginære tal. For i gælder det at:

$$i = \sqrt{-1} \quad og \quad i^2 = -1$$ (se eventuelt bilag 2)

Imaginære tal kan skrives på flere måder fx: $\sqrt{-9}$ eller $i3$ (hvilket er det samme: $i = \sqrt{-1}$).

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{-1} \cdot 3 = i3$$

Skrivemåden $\sqrt{-9}$ anvendes til tider i avancerede matematiske sammenhænge, men der skal udvises omhyggelighed for at undgå fejltagelser, når man bruger udtrykket i denne form.
Den anden notationsform, hvor det imaginære tal angives som fx $i\,3$ er nemmere at benytte.

Det komplekse talsystem (den tilhørende talmængde betegnes $\mathbb{C}$) forener et *reelt* og et *imaginært* tal i et "talpar". Man kan beskrive et komplekst tal som to mere eller mindre "almindelige tal", kaldet den *reelle del* og den *imaginære del*, sat sammen til en enhed.

Ethvert komplekst tal kan skrives som: ***a* + *i b*** (hvor a,b $\in \mathbb{R}$)

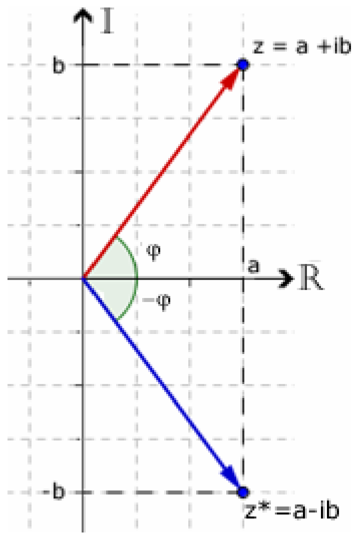
Tallet *a* er den reelle del og i *b* er den imaginære del.

Oprindelig brugte man udtrykket "*imaginære tal*" om de tal, der i dag kaldes "*komplekse tal*". Det nutidige udtryk "*imaginært tal*" refererer i dag til et komplekst tal, hvor den reelle del er 0, - hvilket betyder at *a* = 0 og *b* ≠ 0 (kaldes til tider for et *rent imaginært* tal).

Et sådant rent imaginært tal noteres: $0 + ib$ eller bare ib.

Bemærk, at 0 teknisk set kan betragtes som et rent imaginært tal, - 0 er altså rent imaginært, samtidigt med at det er reelt, - det er det eneste tal med denne egenskab.

Ganske som med de "almindelige", *reelle* tal, kan man foretage en række regneoperationer med de *komplekse tal* og de bruges ofte til at beskrive og regne på ting, som både har en størrelse og en retning (eller vinkel), - fx i forbindelse med elektriske vekselstrømskredsløb.



Konjugeret værdi for z

Hvis z = *a* + i *b* kaldes z*= *a* – i *b* for det konjugerede tal til ***z***

Ved den *konjugerede* værdi af et komplekst tal forstås et tal med samme reelle værdi, men med modsat fortegn foran den imaginære værdi (jf. illustrationen til højre).

I matematiske sammenhænge benyttes ofte en streg til at indikere, at det er den konjugerede værdi – fx: $\bar{z}$
Men i dette kompendium benyttes stjernemarkeringen z*, da stregen henover kan forveksles med stregen/pilen, der angiver en stedvektor.

Det komplekse koordinatsystem

Som nævnt tidligere kan man sammenlægge komplekse tal repræsenteret af stedvektorer grafisk i et parallelogram, når blot man husker at tegne dem i samme målestoksforhold og tage hensyn til deres indbyrdes retninger (if. vandret).

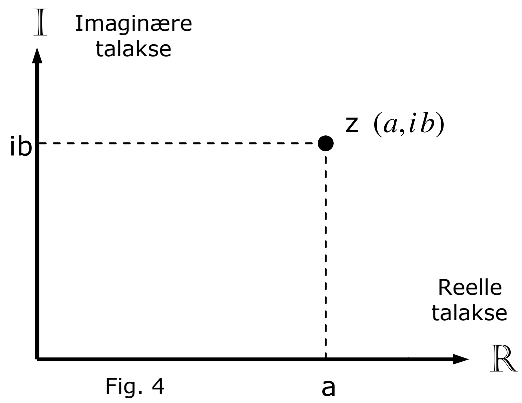


Fig. 4

Stedvektorer kan vises i et såkaldt *komplekst* koordinatsystem, hvor et givet punkt z kan beskrives således, at der til et hvert punkt svarer et sæt *komplekse* koordinater:

$$z = (a, ib)$$

Punktets projektion på de "almindelige" tals akse (der tegnes vandret) kaldes punktets *reelle del*. Punktets projektion på den imaginære talakse er tilsvarende punktets *imaginære del* (se fig. 4).

Når det komplekse talsystem anvendes betegnes den imaginære del ved et "$\imath$" sammen med den imaginære koordinat.

Ved elektriske beregninger skrives den imaginære enhed ofte med **j** for at undgå forveksling med udtrykket for elektrisk strøm, som traditionelt symboliseres med **I**, - i dette kompendium anvendes **j** ved *elektriske* beregninger.

Rektangulær og polær notation

Et komplekst tal kan (som nævnt) skrives som: $z = a + \imath\, b$ (eller $z = a + b\imath$)

hvor *a* er det komplekse tal z's reelle del og *b* er z's imaginære del, - denne skrivemåde kaldes for ***rektangulær*** notationsform (eller *sumform*).

Er *b* negativ noteres z som: $z = a - \imath\, b$ ($\imath(-b) = -\imath\, b$).

I elektrotekniske beregninger kan det komplekse tal z i stedet repræsenteres af en stedvektor (fig. 5) med længden |z| (*modulus*) og vinklen ∠φ i forhold til de reelle tals akse (kaldes også *argumentet*).

Udgangspunktet for en stedvektor er altid *origo* (0,0).

Det komplekse tal kan altså skrives som: $\overline{z} = |z| \angle\varphi$ dette kaldes for ***polær*** form (eller *produktform*).

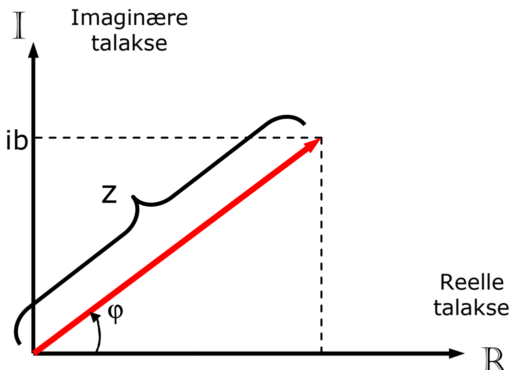


Fig. 5

Hvorvidt man skal anvende den ene eller den anden notationsform afgøres gerne af, hvilken regneoperation der ønskes udført:

Ved addition og subtraktion af to komplekse tal, benyttes den *rektangulære* notationsform. Ved multiplikation og division kan både den rektangulære og den polære notationsform anvendes, men den *polære* notationsform er mest velegnet til formålet.

I matematiske sammenhænge ses ofte notationsformen: $\overline{z} = |z| * \cos\varphi + i|z| * \sin\varphi$. Denne notationsform kaldes sædvanligvis for punktet z's *polære koordinater*.
Ved elektrotekniske beregninger anvendes den polære notationsform $\overline{z} = |z| \angle\varphi$ og den rektangulære form z = a +ib.

Omregning mellem rektangulær og polær form

Rektangulær til polær form

Er det komplekse tal z opgivet på *rektangulær* form $(z = a \pm ib)$, kan dets *modulus* og *argument* beregnes på følgende måde:

Modulus: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Der er et par "faldgrupper", man skal være opmærksom på, når man vil beregne *argumentet*. Tabellen herunder viser beregningsmetoder for argumentet afhængig af værdierne for *a* og *b*.

Husk at værdierne for *a* og *b* skal indsættes med fortegn.

	Argumentet ∠φ i grader	Argumentet ∠φ i radianer	Når værdierne for *a* og *b* er:	
1	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	a > 0	b ≠ 0
2	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + 180^\circ$	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + \pi$	a < 0	b ≥ 0
3	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) - 180^\circ$	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) - \pi$	a < 0	b < 0
4	$+\ 90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	a = 0	b > 0
5	$-\ 90^\circ$	$-\frac{\pi}{2}$	a = 0	b < 0
6	0°	0	a > 0	b = 0
7	0°	0	a = 0	b = 0

Moderne lommeregnere med indbyggede funktioner til komplekse beregninger tager højde for dette, hvorved man kan overlade til lommeregnerens programmering at returnere den korrekte værdi for argumentet.

Polær til rektangulær form

Er det komplekse tal z opgivet på *polær* form, kan tallet omregnes til rektangulær form på følgende måde:

$$z = a \pm ib = (|z| \cdot \cos\varphi) \pm i(|z| \cdot \sin\varphi)$$

Vedr. argumentet (retningsvinklen)

Argumentet (retningsvinklen) for stedvektoren angives i forhold til den valgte referenceakse (sædvanligvis den vandrette).
Der regnes som udgangspunkt med korteste afstand fra reference-aksen (den positive del af x-aksen) til stedvektoren, - dermed kan argumentet for en stedvektor sagtens optræde negativ.

Stedvektorerne på illustrationen (fig. 6) kan skrives som:

$$\vec{z_1} = \left|\vec{z_1}\right| \angle \varphi_1$$

$$\vec{z_2} = \left|\vec{z_2}\right| \angle -\varphi_2$$

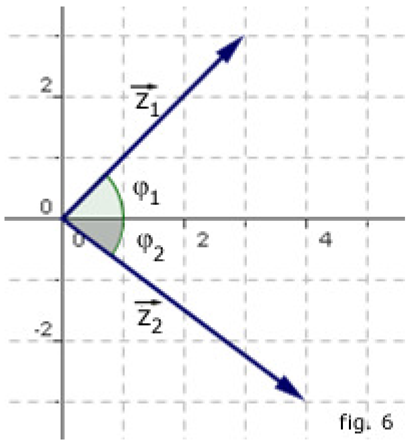


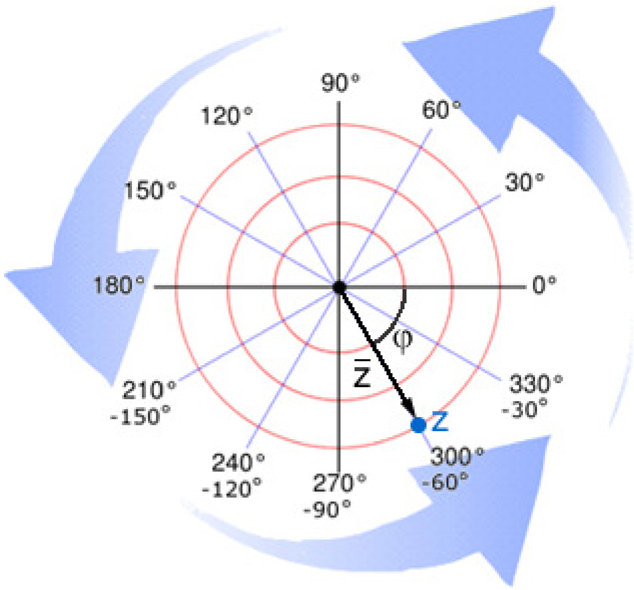
fig. 6

På nedenstående illustration angiver pilene den positive omløbsretning (mod uret).
Det bemærkes, at i tredje og fjerde kvadrant er vinklerne tillige angivet som negative vinkler udgående fra 0° med retning højre om med uret mod 180°.
Ved elektrotekniske beregninger på elektriske kredsløb benyttes vinkler med fortegn for at anskueliggøre hvorvidt en eventuel faseforskydning er induktiv eller kapacitiv (mere herom senere).
Det betyder, at stedvektoren for et komplekst tal beliggende i tredje eller fjerde kvadrant vil blive noteret med en negativ vinkel i forhold til referenceaksen.

Eksempel:

Stedvektoren $\overline{z}$ for det komplekse tal z (hvor φ = 60° og længden 5) er placeret i fjerde kvadrant på illustrationen herunder, - denne stedvektor skal noteres som følger:

$$z = \overline{z} \angle \varphi = 5 \angle -60^\circ$$



Regneregler for komplekse tal

Addition af komplekse tal

Komplekse tal repræsenteret af stedvektorer kan adderes *grafisk*, - jf. side 5.

Addition af komplekse tal foretages lettest, når de komplekse tal, der skal adderes, er noteret på deres rektangulære form z = a + ib (husk at der regnes med fortegn).

Additionen foretages simpelthen ved at addere de komplekse tals *reelle* dele med hinanden og deres *imaginære* dele med hinanden:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \quad \Leftrightarrow \\
z_1 + z_2 &= a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 \quad \Leftrightarrow \\
z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2 \quad \Leftrightarrow \\
z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \quad \Leftrightarrow \\
z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)
\end{aligned}$$

Addition af flere stedvektorer udføres beregningsmæssigt lettest ved at opløse de enkelte stedvektorer i deres såkaldte *komposanter* (a'er og ib'er).
Herefter adderes de reelle komposanter (a_1 + a_2 +…a_n) for sig og de imaginære komposanter (ib_1 + ib_2 +…ib_n) for sig, - resultatet bliver således:

$$z_1 + z_2 + \ldots z_n = (a_1 + a_2 + \ldots a_n) + i(b_1 + b_2 + \ldots b_n)$$

Modulus |z| og *argumentet* ∠φ for den resulterende stedvektor kan beregnes som beskrevet tidligere på side 8.

Eksempler på addition

Eksempel 1:

Givet to komplekse tal: z_1 = 1+i3 og z_2 = 5+i1.
Beregn summen z_{1+2} ved addition:

$$z_{1+2} = z_1 + z_2 = (1+i3) + (5+i1) = (1+5) + i(3+1) = \underline{\underline{6+i4}}$$

Fig. 7 herunder viser den *grafiske* "udgave" af additionen.

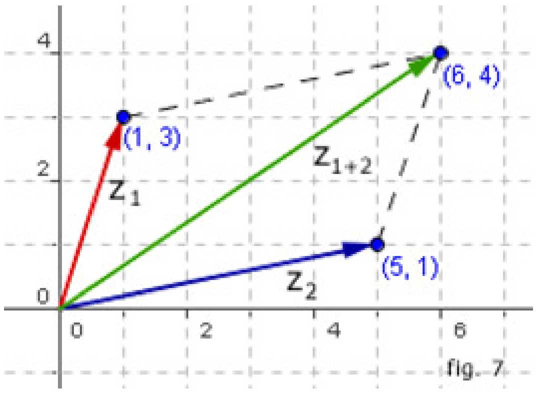


fig. 7

Eksempel 2:

Givet to komplekse tal: z_1 = 1+i3 og z_2 = 5–i2.
Beregn summen z_{1+2} ved addition:

$$z_{1+2} = z_1 + z_2 = (1+i3) + (5+i(-2)) = (1+5) + i(3 +(-2)) = \underline{\underline{6+i1}}$$

Fig. 8 herunder viser den *grafiske* "udgave" af additionen.

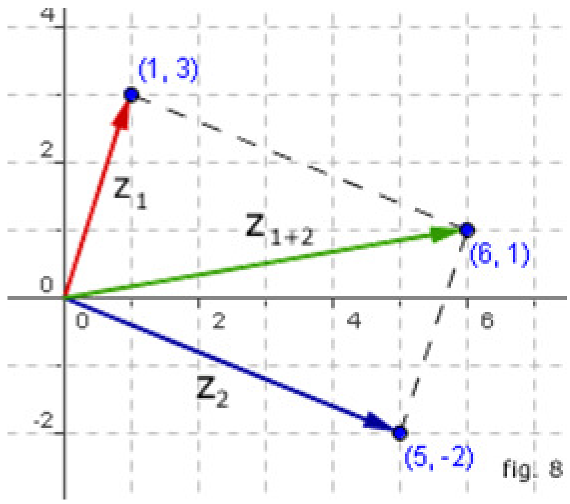


fig. 8

Øvelser med addition

A.1. Givet to komplekse tal z_1 = 4 + i3 og z_2 = 5 +i7, skal summen z_1+z_2 beregnes. Beregn tillige modulus og argumentet for stedvektoren, der repræsenterer resultatet. Tegn vektordiagram og foretag additionen grafisk som kontrol.

A.2. Givet to komplekse tal z_3 = 2 + i4 og z_4 = -3 +i2, skal summen z_3+z_4 beregnes. Beregn tillige modulus og argumentet for stedvektoren, der repræsenterer resultatet. Tegn vektordiagram og foretag additionen grafisk som kontrol.

A.3. Givet to komplekse tal z_5 = -3 - i4 og z_6 = 5 -i2, skal summen z_5+z_6 beregnes. Beregn tillige modulus og argumentet for stedvektoren, der repræsenterer resultatet. Tegn vektordiagram og foretag additionen grafisk som kontrol.

Subtraktion af komplekse tal

Komplekse tal repræsenteret af stedvektorer kan subtraheres *grafisk*, - jf. side 5.

Subtraktion af komplekse tal foretages lettest, når de komplekse tal, der skal subtraheres, er noteret på deres rektangulære form z = a + ib (*husk der regnes med fortegn*).

Subtraktion foretages simpelthen ved at subtrahere de komplekse tals *reelle* dele fra hinanden og deres *imaginære* dele fra hinanden.

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + ib_1 - ib_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Modulus |z| og *argumentet* ∠φ for den resulterende stedvektor kan beregnes som tidligere beskrevet på side 8.

Eksempler på subtraktion

Eksempel 1:

Givet to komplekse tal: z_1 = 2+i4 og z_2 = -3+i2.
Resultatet $z_{1\text{-}2}$ ønskes fundet ved subtraktion:

$$z_{1\text{-}2} = z_1 - z_2 = (2+i4) - (-3+i2) = (2-(-3)) + i(4-2) = \underline{\underline{5+i2}}$$

Fig. 9 herunder viser den *grafiske* "udgave" af subtraktionen.

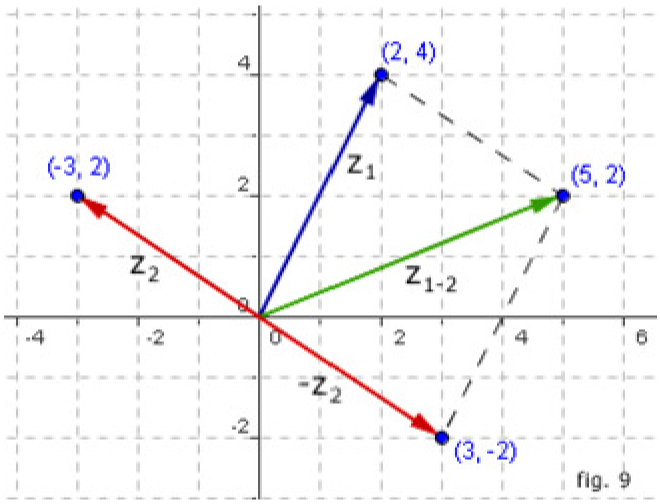


fig. 9

Som nævnt på side 6 kan subtraktion ske som ved addition, idet der gøres brug af, at en stedvektor, der multipliceres med – 1 (minus 1) beholder uændret længde, men blot får "pilen i den anden ende".
Hvorefter stedvektorerne kan adderes som vist i fig. 9, - udtrykket er da blot $\bar{z}_1 + (-\bar{z}_2)$ i stedet for $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

Fortsættes…

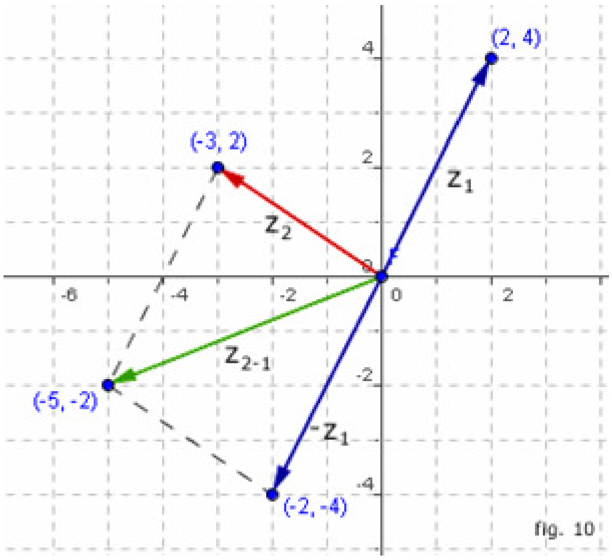
Eksempler på subtraktion

Eksempel 2:

Givet to komplekse tal: $z_1 = 2+i4$ og $z_2 = -3+i2$.
Resultatet $z_{2\text{-}1}$ ønskes fundet ved subtraktion:

$$z_{2\text{-}1} = z_2 - z_1 = (-3+i2) - (2+i4) = (-3-2) + i(2-4) = -5+i(-2) = \underline{\underline{-5-i2}}$$

Fig. 10 herunder viser den *grafiske* "udgave" af subtraktionen.
Som i foregående eksempel er den stedvektor, der skal trækkes fra, multipliceret med – 1.
Subtraktionen sker her ved addition af stedvektorerne ($\overline{z}_2 + (-\overline{z}_1)$).



Det bemærkes hurtigt ved sammenligning af de to eksempler med subtraktion, at de *ikke* giver samme resultat, selvom de komplekse tal $z_1 = 2+i4$ og $z_2 = -3+i2$, er de samme i begge eksempler (hvilket heller ikke er tilfældet ved "normal" subtraktion af reelle tal).

Øvelser med subtraktion

S.1. Givet to komplekse tal $z_1 = 4 + i3$ og $z_2 = 5 + i7$, skal forskellen $z_1 - z_2$ beregnes.
Beregn tillige modulus og argumentet for stedvektoren, der repræsenterer resultatet.
Tegn vektordiagram og foretag subtraktionen grafisk som kontrol.

S.2. Givet to komplekse tal $z_3 = 2 + i4$ og $z_4 = -3 + i2$, skal forskellen $z_3 - z_4$ beregnes.
Beregn tillige modulus og argumentet for stedvektoren, der repræsenterer resultatet.
Tegn vektordiagram og foretag subtraktionen grafisk som kontrol.

S.3. Givet to komplekse tal $z_5 = -3 - i4$ og $z_6 = 5 - i2$, skal summen $z_5 - z_6$ beregnes.
Beregn tillige modulus og argumentet for stedvektoren, der repræsenterer resultatet.
Tegn vektordiagram og foretag subtraktionen grafisk som kontrol.

Multiplikation med komplekse tal

Multiplikation med komplekse tal på rektangulær form.

Man kan relativt let multiplicere to komplekse tal, der begge er noteret på den *rektangulære* form (sumform), - herunder angives en metode til formålet.

Givet to komplekse tal $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$ kan multiplikationen foretages således:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot ib_2 + ib_1 \cdot a_2 + ib_1 \cdot ib_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) + i^2(b_1 \cdot b_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) + (-1) \cdot (b_1 \cdot b_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) - (b_1 \cdot b_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Det fremgår af ovenstående udregning, at multiplikationen udføres på samme måde som i den "almindelige" matematik, hvor man multiplicerer to toleddet størrelser ved at multiplicere hvert af leddene fra den ene parentes med hvert af leddene i den anden parentes, - blot skal man ved komplekse tal huske på, at $i^2 = -1$.

Det kræver vist et eksempel med "rigtige" tal, - ikke…?

Givet to komplekse tal $z_1 = 4 + i3$ og $z_2 = 5 + i7$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (4 \cdot 5 - 3 \cdot 7) + i(4 \cdot 7 + 3 \cdot 5) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (20 - 21) + i(28 + 15) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = -1 + i43$$

Omskrives resultatet til polær form fås (jf. side 8):

Da *a* < 0 og *b* > 0 bruges metode 2 (på side 8) til beregning af argumentet:

$$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{(-1)^2 + 43^2}) \angle \left[\left(\tan^{-1}\left(\frac{43}{-1} \right) \right) + 180^\circ \right] = 43{,}01 \angle 91{,}33^\circ$$

Resultatet af multiplikationen kan altså repræsenteres af en stedvektor beliggende i anden kvadrant i det komplekse koordinatsystem.

Fortsættes næste side…

Fortsat fra forrige side…

Multiplikation med komplekse tal på polær form

Som nævnt på side 8 nederst er den polære notationsform lettest at anvende, hvis man ønsker at multiplicere (og dividere) komplekse tal.

Multiplikation af to komplekse tal, der er noteret på polær form, udføres ved at multiplicere tallenes modulus med hinanden og addere deres argumenter:

$$\vec{z_1} \cdot \vec{z_2} \quad = \quad |z_1| \angle \varphi_1 \cdot |z_2| \angle \varphi_2 \quad = \quad (|z_1| \cdot |z_2|) \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Eksempel 1:

Givet to komplekse tal z_1 = 4 + i3 og z_2 = 5 +i7
Vi ønsker at beregne produktet af disse to komplekse tal.

Først omskrives de komplekse tal til polær notationsform (husk tabellen side 8):

$$\vec{z_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \sqrt{4^2 + 3^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 5 \angle 36{,}87^\circ$$

$$\vec{z_1} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \sqrt{5^2 + 7^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right) = 8{,}60 \angle 54{,}46^\circ$$

Nu kan vi multiplicere tallenes modulus med hinanden og addere deres argumenter:

$$\vec{z_1} \cdot \vec{z_2} = |z_1| \angle \varphi_1 \cdot |z_2| \angle \varphi_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{z_1} \cdot \vec{z_2} = (|z_1| \cdot |z_2|) \angle (\varphi_1 + \varphi_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{z_1} \cdot \vec{z_2} = (5 \cdot 8{,}60) \angle (36{,}87^\circ + 54{,}46^\circ) \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{z_1} \cdot \vec{z_2} = 43{,}01 \angle 91{,}33^\circ$$

Øvelser med multiplikation

M.1. Givet to komplekse tal z_1 = 3 + i4 og z_2 = 5 +i7, skal produktet $z_1 * z_2$ beregnes. Omskriv de komplekse tal til polær notation og foretag multiplikationen. Omskriv derefter resultatet til rektangulær notationsform.

M.2. Givet to komplekse tal z_3 = 2 + i4 og z_4 = -3 +i2, skal produktet $z_3 * z_4$ beregnes. Omskriv de komplekse tal til polær notation og foretag multiplikationen. Omskriv derefter resultatet til rektangulær notationsform.

M.3. Givet to komplekse tal z_5 = -3 - i4 og z_6 = 5 -i2, skal produktet $z_5 * z_6$ beregnes. Omskriv de komplekse tal til polær notation og foretag multiplikationen. Omskriv derefter resultatet til rektangulær notationsform.

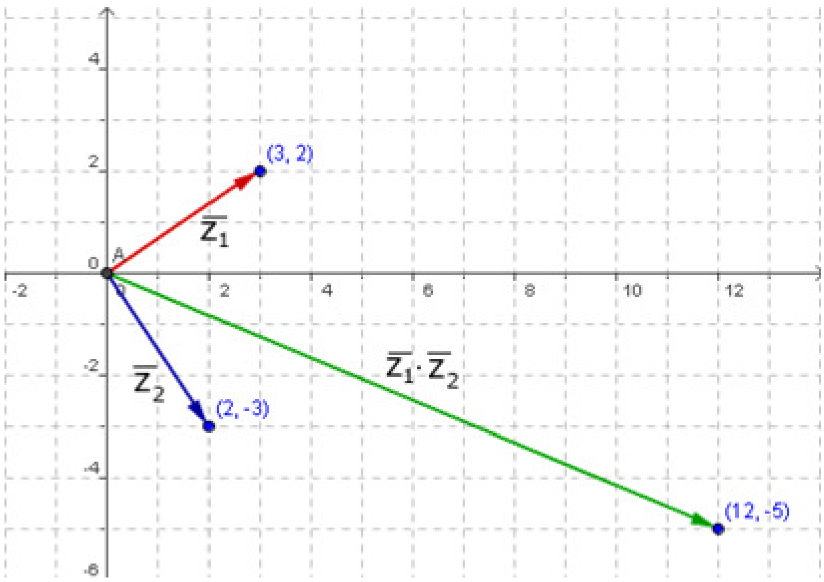
Flot klaret, - videre til næste side for et eksempel mere…

Multiplikation med komplekse tal på polær form

Eksempel 2:

Lad to komplekse tal z_1 = 3 + i2 og z_2 = 2 – i3 være repræsenteret af stedvektorerne $\overline{z}_1$ og $\overline{z}_2$

Omskrevet til polær form er $\overline{z}_1 = 3{,}61\angle 33{,}69^\circ$ og $\overline{z}_1 = 3{,}61\angle{-56{,}31}^\circ$ (som det fremgår af illustrationen herunder).



Beregning af $z_1 * z_2$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = |z_1|\angle\varphi_1 \cdot |z_2|\angle\varphi \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = (|z_1| \cdot |z_2|)\angle(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = (3{,}61 \cdot 3{,}61)\angle(33{,}69^\circ + (-56{,}31^\circ)) \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 13{,}0\angle -22{,}62^\circ$$

Den negative vinkel betyder blot, at den stedvektor, der repræsenterer produktet $z_1 * z_2$ befinder sig i fjerde kvadrant i det komplekse koordinatsystem i en vinkel på 22,62° målt fra den reelle talakse i negativ omløbsretning (med uret), - som det fremgår af illustrationen.

Omskrives produktet $z_1 * z_2$ til rektangulær form, bliver resultatet:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2| \cdot \cos(\varphi) + i\left(|z_1 \cdot z_2| \cdot \sin(\varphi)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = |13{,}0| \cdot \cos(-22{,}62^\circ) + i\left(|13{,}0| \cdot \sin(-22{,}62^\circ)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = 12 + i(-5) \quad \Leftrightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = 12 - i5$$

Division med komplekse tal

Division med komplekse tal på rektangulær form

Division med komplekse tal, der er noteret på den rektangulære form, kan lade sig gøre, - det kræver såmænd bare en formel og en smule tålmodighed ☺

Givet to komplekse tal $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$ vil en division mellem disse betyde, at nævneren er et komplekst tal. Det vil være en meget god idé, hvis nævneren i stedet kunne "forvandles" til et reelt tal, - hvilket vil ske, hvis brøken forlænges (i tæller og nævner) med den kompleks konjugerede til nævneren.

Tæller (dividend):	$z_1 = a_1 + ib_1$
Nævner (divisor):	$z_2 = a_2 + ib_2$
Den kompleks konjugerede til nævneren:	$z_2^* = a_2 - ib_2$

Nu kan divisionen udføres, - blot vi husker på at $i^2 = -1$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)\cdot(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)\cdot(a_2 - ib_2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ib_1a_2 - i^2b_1b_2}{a_2a_2 - ia_2b_2 + ib_2a_2 - i^2b_2b_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + i(-a_1b_2) + ib_1a_2 - (-1)\cdot b_1b_2}{a_2a_2 - ia_2b_2 + ib_2a_2 - (-1)\cdot b_2b_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + i(-a_1b_2 + b_1a_2) + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(-a_1b_2 + b_1a_2)}{a_2^2 + b_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(-a_1b_2 + b_1a_2)}{a_2^2 + b_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + i\left(\frac{(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

Beregningseksempel følger på næste side…

Eksempel:

Givet to komplekse tal z_1 = 8 + i6 og z_2 = 4 – i3.
Vi ønsker at beregne resultatet af divisionen mellem disse to komplekse tal.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + i\left(\frac{(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(8\cdot 4) + 6\cdot(-3)}{4^2 + (-3)^2} + i\left(\frac{(6\cdot 4) - 8\cdot(-3)}{4^2 + (-3)^2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 0{,}56 + i\,1{,}92$$

Division med komplekse tal på polær form

Som nævnt på side 8 nederst er den polære notationsform lettest at anvende, hvis man ønsker at dividere (og multiplicere) komplekse tal.

Division af to komplekse tal, der er noteret på polær form, udføres ved at dividere tallenes modulus med hinanden og subtrahere deres argumenter:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\angle\varphi_1}{|z_2|\angle\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Eksempel:

Givet to komplekse tal z_1 = 8 + i6 og z_2 = 4 – i3.
Vi ønsker at beregne resultatet af divisionen mellem disse to komplekse tal.

Først omskrives de komplekse tal til polær notationsform (husk tabellen side 8):

$$\vec{z_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\angle\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \sqrt{8^2 + 6^2}\,\angle\tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) = 10\angle 36{,}87^\circ$$

$$\vec{z_1} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\angle\tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \sqrt{4^2 + (-3)^2}\,\angle\tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = 5\angle -36{,}87^\circ$$

Nu kan vi dividere tallenes modulus hinanden og subtrahere deres argumenter:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\angle\varphi_1}{|z_2|\angle\varphi_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\angle(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|10|}{|5|}\angle\left(36{,}87^\circ - \left(-36{,}87^\circ\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2\angle 73{,}74^\circ$$

Fortsættes næste side…

Omskrives resultatet $z_1/\ z_2$ til rektangulær form, bliver resultatet:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot \cos(\varphi) + i\left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot \sin(\varphi)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = |\,2\,| \cdot \cos(73{,}74^\circ) + i\left(|\,2\,| \cdot \sin(73{,}74^\circ)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 0{,}56 + i\,1{,}92$$

Øvelse med division

D.1. Givet to komplekse tal $z_1 = 8 + i5$ og $z_2 = 3 - i7$, skal kvotienten z_1/z_2 beregnes.
Udfør divisionen med de komplekse tal på rektangulær notationsform.
Omskriv de komplekse tal til polær notation og foretag divisionen på polær form.

Oversigt over regneoperationer med komplekse tal

De foregående sider har været en gennemgang af de fire grundlæggende regneoperationer, som kan udføres med komplekse tal, - addition, subtraktion, multiplikation og division. Skemaet herunder er en oversigt over de fire regneoperationer opdelt på den rektangulære og den polære notationsform.

HUSK: Der *skal* regnes med fortegn.

Regne-operation	**Rektangulær notation** $z_1 = a_1 + ib_1$ $z_2 = a_2 + ib_2$	**Polær notation** $z_1 = z_1 \angle\varphi_1$ $z_2 = z_2 \angle\varphi_2$
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$	
Subtraktion	$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2)$	
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)$	$z_1 \cdot z_2 = (\lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert)\angle(\varphi_1 + \varphi_2)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + i\left(\frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right)$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$

Den multiplikative inverse

(Den reciprokke værdi af et komplekst tal)

Ved beregning af den samlede impedans i elektriske vekselstrømskredsløb med parallel-forbundne impedanser, kan det være nødvendigt at anvende de reciprokke værdier (de multiplikative inverse værdier) til impedanserne, der udgør kredsløbet.

Følgende metoder kan anvendes afhængig af notationsformen:

Regne-operation	**Rektangulær notation** $z = a + ib$	**Polær notation** $z = z \angle\varphi$
Reciprok	$\frac{1}{z} = \frac{1 + i0}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ Værdierne for *a* og *b* indsættes med fortegn.	$\frac{1}{z} = \frac{1\angle 0^\circ}{z\angle\varphi} = \frac{1}{\lvert z\rvert}\angle(-\varphi)$ Værdien for φ indsættes med fortegn.

På side 23 og 24 finder du et eksempel på anvendelse af *den reciprokke værdi* til et komplekst tal, hvor den samlede impedans i et parallelforbundet kredsløb skal beregnes.

Komplekse tal og elektrotekniske beregninger

Som tidligere nævnt skrives den imaginære enhed ofte med suffikset **j** ved elektriske beregninger for at undgå forveksling med strømmen I, derfor vil **j** blive anvendt ved de efterfølgende *elektriske* beregninger.

Den udvidede Ohms[1] lov

En (sinusformet) vekselspænding kan repræsenteres af det komplekse tal $\overline{U} = U \angle\varphi_1$
U er spændingens effektiv værdi og $\angle\varphi_1$ er spændingens vinkel i forhold til referencen.
Ved beregninger på vekselstrømskredsløb vil man i visse sammenhænge vælge at anvende klemspændingen som reference – i det tilfælde kan spændingen noteres som: $\overline{U} = U \angle 0^\circ$.

Når denne spænding således tilsluttes et kredsløb eller komponent, vil dette forårsage en strøm i kredsløbet eller komponenten, - denne strøm kan på den komplekse polære form skrives som $\overline{I} = I \angle\varphi_2$.

Forholdet mellem spændingen U (der måles i volt) og strømmen I (der måles i ampere) kan betegnes som impedansen Z (denne måles i ohm).
Dette forhold kan udtrykkes med den udvidede Ohms lov:

$$\overline{Z} = \frac{U\angle\varphi_1}{I\angle\varphi_2} = \frac{U}{I}\angle(\varphi_1 - \varphi_2) = Z\angle\varphi_3$$

Vinklerne φ_1, φ_2 og φ_3 er spændingens, strømmens og impedansens forskydningsvinkler i forhold til referencen.

Impedansen Z

Impedansen Z, der som nævnt er forholdet mellem spændingen og strømmen i et elektrisk kredsløb/komponent kan på den rektangulære notationsform skrives som:

$$\overline{Z} = R \pm jX \quad [\Omega]$$

Hvor den reelle del **R** repræsenterer kredsløbets/komponentens *resistans* (der også kan kaldes for "den ohmske modstand").
Den imaginære del **X** er kredsløbets/komponentens *reaktans,* der enten kan være *induktiv* eller *kapacitiv*, - hvilket har indflydelse på, hvorvidt X skal noteres som negativ eller positiv. Hvordan fortegnet afgøres kan du læse om herunder og øverst næste side.

Induktansen X_L

Er den imaginære del X forårsaget af en spole kaldes den for *induktans* (induktiv reaktans), – som indeks kan anvendes et $_L$ "hægtet på" X for at undgå forveksling.

Induktansen X_L kan som bekendt beregnes med følgende formel: $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$

Impedansen Z dannet af resistansen R og induktansen X_L skrives på rektangulær form som:

$$\overline{Z} = R + jX_L \quad [\Omega]$$

På polær form (omregnet efter metoderne på side 8) noteres impedansen Z som:

$\overline{Z} = |Z| \angle\varphi$ (ofte undlades numerisk tegnet ||)

Fortsættes næste side…

[1] Efter den tyske fysiker Georg Simon Ohm (1787 – 1854).

Fortsat fra forrige side…

Kapacitansen X_C

Er den imaginære del X forårsaget af en kondensator kaldes den for *kapacitans* (kapacitiv reaktans) – som indeks kan anvendes et $_C$ ”hægtet på” X for at undgå forveksling.

Kapacitansen X_C kan som bekendt beregnes med følgende formel: $X_C = \dfrac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f \cdot C)}$

Impedansen Z dannet af resistansen R og kapacitansen X_C skrives på rektangulær form som:

$$\overline{Z} = R - j\,X_C \quad [\Omega]$$

På polær form (omregnet efter metoderne på side 8) noteres impedansen Z som:

$\overline{Z} = |Z| \angle -\varphi$ (ofte undlades numerisk tegnet ||)

Skematisk oversigt over notationsformer

De ”rene” elektriske komponenter – resistans, induktans og kapacitans – skrives på kompleks notationsform (rektangulær og polær) som anført i nedenstående skema:

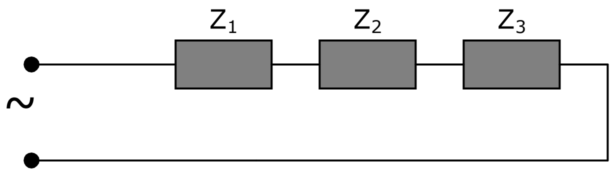
I tabellen og de efterfølgende elektriske beregninger udelades numerisk tegnet || ved polær notation.

Resistans R	**Induktans** L	**Kapacitans** C
$\overline{Z} = R + j0$	$\overline{Z} = 0 + j\,X_L$	$\overline{Z} = 0 - j\,X_C$
$\overline{Z} = R \angle 0^\circ$	$\overline{Z} = X_L \angle 90^\circ$	$\overline{Z} = X_C \angle -90^\circ$

Sammenlægning (addition) af impedanser

Ved serieforbindelser

For at beregne den samlede impedans i kredsløbet, skrives impedanserne først på rektangulær form, hvorefter de reelle dele (R) adderes for sig og de imaginære dele (X) for sig.



z_1 = 330 + j190,6 Ω

z_2 = 110 – j190,6 Ω

z_3 = 100 + j0 Ω

$$R_{kreds} + j\,X_{kreds} = (R_1 + j\,X_1) + (R_2 - j\,X_2) + (R_3 + j\,X_3)$$
$$R_{kreds} + j\,X_{kreds} = (330 + j190{,}6) + (110 - j190{,}6) + (100 + j0)$$
$$R_{kreds} + j\,X_{kreds} = (330 + 110 + 100) + j(190{,}6 - 190{,}6 + 0)$$
$$R_{kreds} + j\,X_{kreds} = 540 + j0\,\Omega$$

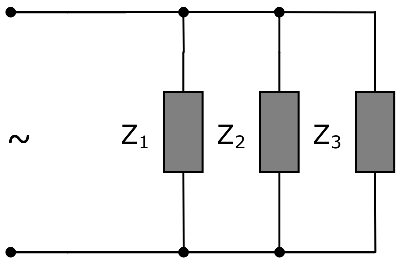
Omskrevet til polær form (jf. side 8):

$$z_{kreds} \angle \varphi_{kreds} \;=\; 540 \angle 0^\circ\ \Omega$$

Kredsens samlede modstand er altså ”ren” ohmsk og vil ikke give anledning til faseforskydning mellem strøm og spænding, når kredsen tilsluttes en vekselspænding.

Ved parallelforbindelser

Den samlede impedans Σ z $_{kreds}$ i det viste kredsløb kan beregnes ved at anvende *reciprok-formlen* på de komplekse værdier for impedanserne z_1, z_2 og z_3 i kredsløbet (jf. illustrationen).



z_1 = 330 + j190,6 Ω
z_1 = 381,1 ∠30° Ω

z_2 = 110 – j190,6 Ω
z_2 = 220,1 ∠-60° Ω

z_3 = 100 + j0 Ω
z_3 = 100 ∠0° Ω

I det tilfælde, at man har en lommeregner, der kan håndtere de komplekse tal direkte, kan man udføre beregningen på polær form, som i udregningen herunder:

$$\frac{1\angle 0^\circ}{\Sigma\, z_{kreds}\angle\varphi_{kreds}} = \frac{1\angle 0^\circ}{z_1\angle\varphi_1} + \frac{1\angle 0^\circ}{z_2\angle\varphi_2} + \frac{1\angle 0^\circ}{z_3\angle\varphi_3} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Sigma\, z_{kreds}\angle\varphi_{kreds} = \frac{1\angle 0^\circ}{\dfrac{1\angle 0^\circ}{z_1\angle\varphi_1} + \dfrac{1\angle 0^\circ}{z_2\angle\varphi_2} + \dfrac{1\angle 0^\circ}{z_3\angle\varphi_3}}$$

$$\Sigma\, z_{kreds}\angle\varphi_{kreds} = \frac{1\angle 0^\circ}{\dfrac{1\angle 0^\circ}{381{,}1\angle 30^\circ} + \dfrac{1\angle 0^\circ}{220{,}1\angle -60^\circ} + \dfrac{1\angle 0^\circ}{100\angle 0^\circ}}$$

$$\Sigma\, z_{kreds}\angle\varphi_{kreds} = 67{,}7\angle -10{,}2^\circ\ \Omega$$

Af resultatet ses, at kredsens samlede impedans vil forårsage en kapacitiv faseforskydning mellem klemspændingen og den optagne strøm, - men det er en helt anden snak, som vi kommer ind på senere i kompendiet.

Har man ikke en lommeregner, der kan klare de komplicerede beregninger med impedanserne skrevet på den polære notationsform, kan man i stedet med en ”almindelig” lommeregner foretage beregningen med de komplekse værdier for z_1, z_2 og z_3 skrevet på den rektangulære notationsform (*j* anvendes i stedet for *i*, - jf. side 7 midt).

$$\frac{1}{\Sigma\, z_{kreds}} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1+j0}{a_{kreds}+jb_{kreds}} = \frac{1+j0}{a_1+jb_1} + \frac{1+j0}{a_2+jb_2} + \frac{1+j0}{a_3+jb_3}$$

Med værdierne for de tre impedanser indsat i ovenstående formel, ser det således ud:

$$\frac{1+j0}{a_{kreds}+jb_{kreds}} = \frac{1+j0}{330+j190{,}6} + \frac{1+j0}{110-j190{,}6} + \frac{1+j0}{100+j0}$$

Beregningen kan stadig ikke foretages, med mindre man har en særlig lommeregner, - derfor må løsningsmodellen for beregning af reciprokværdien for et komplekst tal (side 20), noteret på den rektangulære form, benyttes på ovenstående udregning.

Fortsættes næste side…

Fortsat fra forrige side…

Anvendes metoden fra side 20 til beregning af den reciprokke værdi af et komplekst tal på de tre impedanser i kredsløbet, ser løsningsmodellen for den pågældende udregning således ud:

$$\frac{1+j0}{a_{kreds}+jb_{kreds}} = \left(\frac{a_1}{a_1{}^2+b_1{}^2} - j\left(\frac{b_1}{a_1{}^2+b_1{}^2}\right)\right) + \left(\frac{a_2}{a_2{}^2+b_2{}^2} - j\left(\frac{b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2}\right)\right) + \left(\frac{a_3}{a_3{}^2+b_3{}^2} - j\left(\frac{b_3}{a_3{}^2+b_3{}^2}\right)\right)$$

Nu kan værdierne for *a* og *b* for de tre impedanser indsættes i ovenstående beregningsmodel:

$$\frac{1+j0}{a_{kreds}+jb_{kreds}} = \left(\frac{330}{330^2+190{,}6^2} - j\left(\frac{190{,}6}{330^2+190{,}6^2}\right)\right) + \left(\frac{110}{110^2+(-190{,}6)^2} - j\left(\frac{-190{,}6}{110^2+(-190{,}6)^2}\right)\right) + \left(\frac{100}{100^2+0^2} - j\left(\frac{0}{100^2+0^2}\right)\right)$$

$$\frac{1+j0}{a_{kreds}+jb_{kreds}} = (0{,}00227-j0{,}00131)+(0{,}00227+j0{,}00394)+(0{,}01-j0)$$

$$\frac{1+j0}{a_{kreds}+jb_{kreds}} = (0{,}01454-j0{,}00263)$$

$$a_{kreds}+jb_{kreds} = \frac{1+j0}{(0{,}01454-j0{,}00263)}$$

$$a_{kreds}+jb_{kreds} = \frac{0{,}01454}{0{,}01454^2+0{,}00263^2} - j\left(\frac{0{,}00263}{0{,}01454^2+0{,}00263^2}\right)$$

$$a_{kreds}+jb_{kreds} = 66{,}60-j12{,}05\ \Omega$$

Omskrevet til den polære notationsform (jf. side 8) bliver resultatet således:

$$\Sigma z_{kreds}\angle\varphi_{kreds} = 67{,}7\angle-10{,}2^\circ\ \Omega$$

Det medfører lidt ekstra "arbejde", hvis man ikke har en lommeregner, der kan håndtere de komplekse tal, men som det ses af denne udregning, kan det sagtens lade sig gøre med en "almindelig" lommeregner (og masser af overblik ☺).

Vedrørende strøm og spænding

Forholdene omkring strømme og spændinger i serielle og parallelle kredsløb tilsluttet en vekselspænding følger samme principper som angivet i Kirchhoffs[2] love om spændingsdeling i serielle kredsløb og strømdeling i parallelle jævnstrømskredsløb, - dog skal man huske at medregne faseforskydningsvinkler.

Ved blandede forbindelser skal man selvfølgelig kombinere beregningsmetoderne fra serie- og parallelforbindelser efter behov.

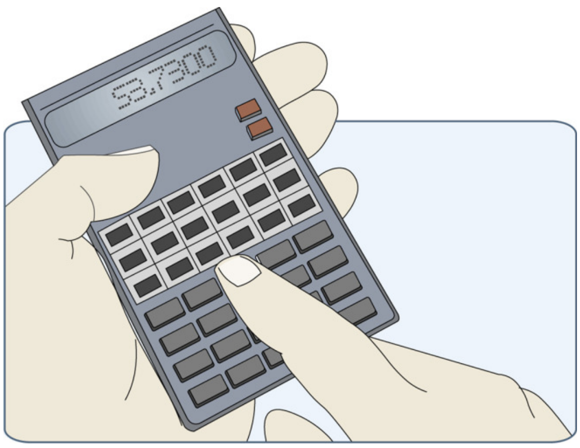
Spændingsfaldet over en impedans beregnes som produktet af impedansen og strømmen, der løber igennem impedansen, - denne beregning kan enten foretages med faktorerne skrevet på polær form eller på rektangulær form (jf. side 20).
Ligeledes kan strømmen gennem en impedans beregnes som forholdet mellem spændingen og impedansen (Ohms lov).

Sammenlægning (addition) af flere strømme eller spændinger foretages ved at notere de enkelte strømme eller spændinger på den rektangulære form og derefter addere de reelle dele for sig og de imaginære dele for sig. Den samlede spænding eller strøm kan herefter omregnes til polær form efter metoderne beskrevet på side 8.

Beregningseksempler

På de efterfølgende sider er medtaget et eksempel på beregning af spændings-, strøm-, impedansforhold, effektfaktor samt faseforskydningsvinkel for et vekselstrømskredsløb sammensat af to serielle kredsløb, der er koblet parallel, - altså en blandet forbindelse.

Først vises beregningerne på den traditionelle måde, derefter gentages beregningerne ved hjælp af komplekse tal og de tilhørende beregningsmetoder.



Som nævnt i forordet forudsættes det, at læseren – for at kunne få udbytte af de efterfølgende komplekse beregninger – allerede har tilegnet sig en grundlæggende forståelse for vekselstrømsteorien, de tilknyttede begreber samt "traditionelle" beregningsmetoder.

[2] Den tyske fysiker Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887).

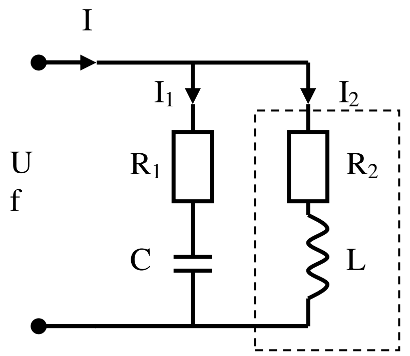
Traditionel beregning af vekselstrømskredsløb

Her bruges stedvektorer udelukkende til skitsen, der tegnes over kredsløbets strømme og spænding.

Mellem to klemmer med spændingen 130 V, 50 Hz er indsat en spole med resistans 2,0 Ω og en selvinduktionskoefficient på 8,0 mH. Spolen parallelforbindes med en serieforbindelse af en (ideel) kondensator på 400 μF og en (ren) ohmsk modstand (resistans) på 10,0 Ω.

Beregn:

- Strømmen gennem spolen I_2
- Strømmen gennem kondensatoren I_1
- Den samlede strøm I
- Parallelforbindelsens faseforskydningsvinkel φ



Først beregnes spolens induktans X_L , impedans Z_2 og $\cos\varphi_2$:

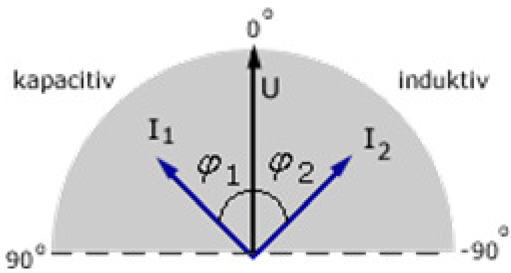
$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}008 = 2{,}51\,\Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{(R_2)^2 + (X_L)^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 2{,}51^2} = 3{,}21\,\Omega$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{2{,}0}{3{,}21} = 0{,}623 \quad \Rightarrow \quad \angle\varphi_2 = 51{,}49°$$

Derefter kan den induktive strøm I_2 gennem spolen beregnes:

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{130}{3{,}21} = \underline{\underline{40{,}5A}} \text{ (induktiv)}$$



Kondensatorens kapacitans X_C beregnes:

$$X_C = \frac{10^6}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{10^6}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 400} = 7{,}96\,\Omega$$

Impedansen for serieforbindelsen af kondensatoren og R_1 samt $\cos\varphi_1$ beregnes:

$$Z_1 = \sqrt{(R_1)^2 + (X_C)^2} = \sqrt{10{,}0^2 + 7{,}96^2} = 12{,}78\,\Omega$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{10{,}0}{12{,}78} = 0{,}783 \quad \Rightarrow \quad \angle\varphi_1 = 38{,}51°$$

Derefter kan den kapacitive strøm I_1 gennem kondensatoren og R_1 beregnes:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{130}{12{,}78} = \underline{\underline{10{,}2A}} \text{ (kapacitiv)}$$

fortsættes…

Traditionel beregning – fortsat

Vi kan nu tegne (sted)vektordiagram (skitse) for strømmene, idet klemspændingen U anvendes som referencevektor (0°) for de videre beregninger, - i dette tilfælde afsættes stedvektoren for U lodret. Ofte (og måske mere korrekt) afsættes referencevektoren vandret, men det har ingen betydning for beregningerne.

Strømmene kan nu opløses i deres *komposanter* (stedvektorens projektioner på akserne):

Watt-strømmen I_W og den Wattløse-strøm I_{WL}.

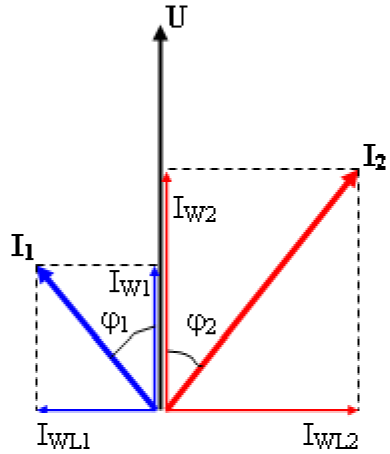
Under tiden bliver Watt-strømmen I_W i stedet benævnt som *virkestrømmen I_V* og den Wattløse-strøm I_{WL} som *reaktiv strømmen I_R*.

For strømmen I_1:

$$I_{W1} = I_1 \cdot \cos\varphi_1 = 10{,}2 \cdot \cos(38{,}51°) = 7{,}96A$$
$$I_{WL1} = I_1 \cdot \sin\varphi_1 = 10{,}2 \cdot \sin(38{,}51°) = 6{,}33A$$

For strømmen I_2:

$$I_{W2} = I_2 \cdot \cos\varphi_2 = 40{,}5 \cdot \cos(51{,}49°) = 25{,}21A$$
$$I_{WL2} = I_2 \cdot \sin\varphi_2 = 40{,}5 \cdot \sin(51{,}49°) = 31{,}69A$$



Den samlede strøm I (kredsens optagne strøm fra spændingskilden) kan nu beregnes:

Da stedvektorerne for I_{WL1} og I_{WL2} er modsat rettede, skal de adderes med fortegn, derved vil sammenlægningen af disse blive I_{WL2} + (- I_{WL2}), hvilket er det samme som at subtrahere (del)strømmenes numeriske værdier: $|I_{WL2}|$ - $|I_{WL2}|$ (altså trække dem fra hinanden).

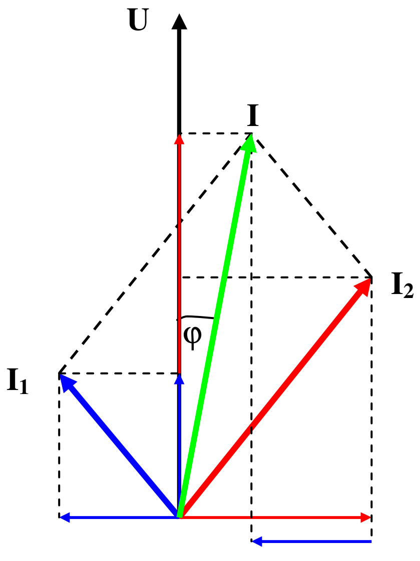
Beregningen af I udføres således:

$$I = \sqrt{(\Sigma I_W)^2 + (\Sigma I_{WL})^2} = \sqrt{(I_{W1} + I_{W2})^2 + (I_{WL1} - I_{WL2})^2}$$
$$I = \sqrt{(7{,}96 + 25{,}21)^2 + (6{,}33 - 31{,}69)^2} = \underline{\underline{41{,}76A}}$$

Kredsens effektfaktor cos φ samt kredsens samlede faseforskydningsvinkel φ (mellem U og I) beregnes:

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma I_W}{I} = \frac{7{,}96 + 25{,}21}{41{,}76} = 0{,}795 \quad \Rightarrow \quad \angle\varphi = \underline{\underline{37{,}39°}}$$

Da strømmen I er faseforskudt bagud i forhold til spændingen U, er kredsen samlet set induktiv.
(vektordiagrammets omløbsretning er venstre om mod uret)



Beregning af vekselstrømskredsløb med komplekse tal

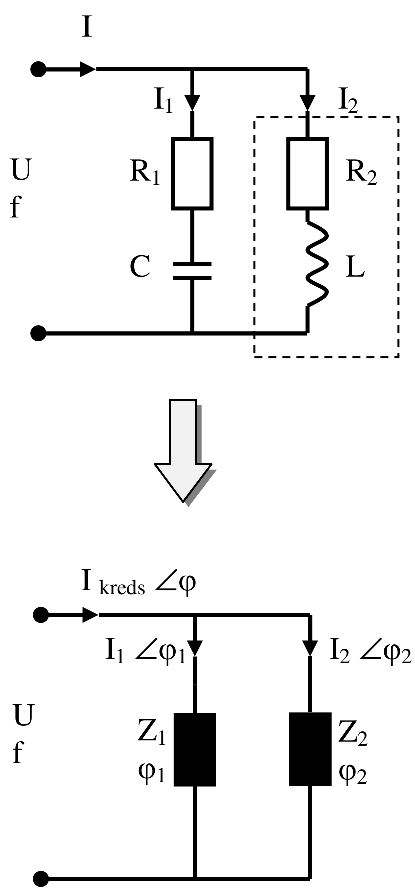
Her bruges stedvektorer til skitsen, der tegnes over kredsløbets strømme og spænding og i forbindelse med beregningerne af strøm-, spændings- og impedansforholdene i kredsløbet.

Opgaven er den samme som før:

Mellem to klemmer med spændingen 130 V, 50 Hz er indsat en spole med resistans 2,0 Ω og en selvinduktionskoefficient på 8,0 mH. Spolen parallelforbindes med en serieforbindelse af en (ideel) kondensator på 400 μF og en (ren) ohmsk modstand (resistans) på 10,0 Ω.

Beregn:

- Strømmen gennem spolen I_2
- Strømmen gennem kondensatoren I_1
- Den samlede strøm I
- Parallelforbindelsens faseforskydningsvinkel φ



Kondensatoren C's kapacitans X_C beregnes:

$$X_C = \frac{10^6}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{10^6}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 400} = 7{,}96\Omega$$

Impedansen Z_1 for serieforbindelsen af kondensatoren C og R_1 samt $\angle\varphi_1$ beregnes (jf. side 8):

$$Z_1 = \sqrt{(R_1)^2 + (X_C)^2} = \sqrt{10{,}0^2 + 7{,}96^2} = 12{,}78\Omega$$

$$\angle\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7{,}96}{10{,}0}\right) \quad \Rightarrow \quad \angle\varphi_1 = 38{,}51°$$

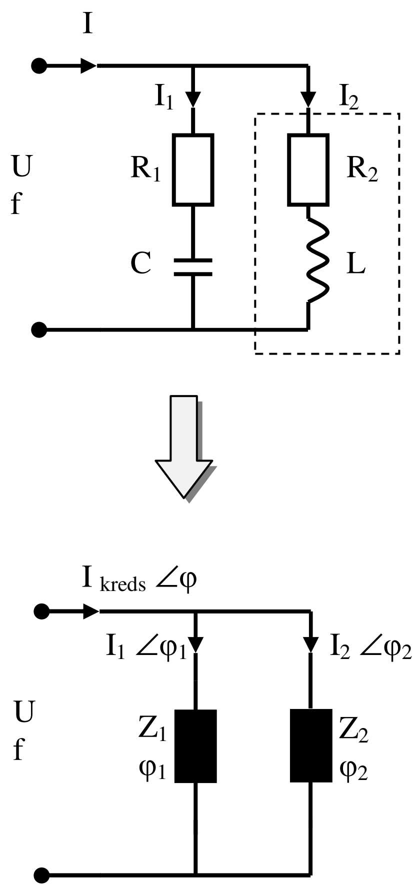
Impedansen Z_1 kan således noteres som et komplekst tal (jf. side 22) på rektangulær og/eller polær form:

Rektangulært (sumform): $Z_1 = 10 - j7{,}96\ \Omega$

Polært (produktform): $Z_1 = 12{,}78\angle -38{,}51\,\Omega$

Da Z_1 er kapacitiv (pga. kondensatoren C) noteres impedansen Z_1 på rektangulær form med et minus mellem den reelle del og den komplekse del. Af sammen grund noteres Z_1 med negativ vinkel (φ_1) på den polære notationsform (se side 22).

fortsættes næste side...



Spolens L'^{s} induktans X_L beregnes:

$$X_L = 2\cdot\pi\cdot f\cdot L = 2\cdot\pi\cdot 50\cdot 0{,}008 = 2{,}51\Omega$$

Impedansen Z_2 for serieforbindelsen af spolen L og R_2 samt $\angle\varphi_2$ beregnes (jf. side 8):

$$Z_2 = \sqrt{(R_2)^2 + (X_L)^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 2{,}51^2} = 3{,}21\Omega$$

$$\angle\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}51}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \angle\varphi_2 = 51{,}49° \text{ (induktiv)}$$

Impedansen Z_2 kan således noteres som et komplekst tal (jf. side 22) på rektangulær og/eller polær form:

Rektangulært (sumform): $Z_2 \;=\; 2 + j\,2{,}51\ \Omega$

Polært (produktform): $Z_2 \;=\; 3{,}21\angle 51{,}49\ \Omega$

Da Z_2 er kapacitiv (pga. spolen L) noteres impedansen Z_2 på rektangulær form med et plus mellem den reelle del og den komplekse del. Af sammen grund noteres Z_2 med positiv vinkel (φ_2) på den polære notationsform (se side 21).

Strømme I_1 gennem Z_1 og strømmen I_2 gennem Z_2 kan nu beregnes, - se næste side…

Strømmen I_1 gennem impedansen Z_1 kan beregnes:

$$I_1\angle\varphi_1 = \frac{U\angle 0^\circ}{Z_1\angle\varphi_1} = \frac{130\angle 0^\circ}{12{,}78\angle -38{,}52^\circ} = \frac{130}{12{,}78}\angle\left(0^\circ - \left(-38{,}52^\circ\right)\right) = 10{,}17\angle 38{,}52^\circ$$

(Se eventuelt afsnittet om division med komplekse tal på polær notationsform side 18)

Strømmen I_1 omskrevet på rektangulær form (se side 8):

$$I_1 = 7{,}96 + j\,6{,}33\ A$$

Bemærk at den kapacitive strøm I_1 er noteret med en positiv vinkel på polær form og med et plus mellem den reelle del og den komplekse del på den rektangulære notationsform. Dette betyder, at strømmen I_1 er (fase)forskudt forud for klemspændingen U, – hvilket kendetegner en kapacitiv strøm.

Strømmen I_2 gennem impedansen Z_2 kan beregnes:

$$I_2\angle\varphi_2 = \frac{U\angle 0^\circ}{Z_2\angle\varphi_2} = \frac{130\angle 0^\circ}{3{,}21\angle 51{,}49^\circ} = \frac{130}{3{,}21}\angle\left(0^\circ - 51{,}49^\circ\right) = 40{,}5\angle -51{,}49^\circ$$

(Se eventuelt afsnittet om division med komplekse tal på polær notationsform side 18)

Strømmen I_2 omskrevet på rektangulær form (se side 8):

$$I_2 = 25{,}22 - j\,31{,}69\ A$$

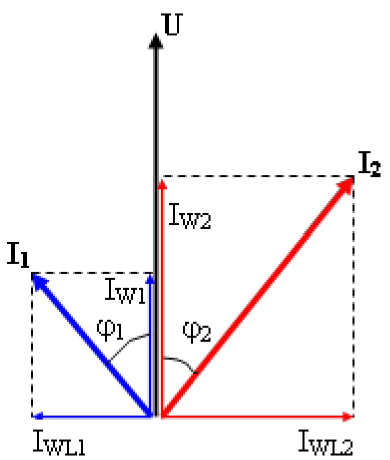
Bemærk at den induktive strøm I_2 er noteret med en negativ vinkel på polær form og med et minus mellem den reelle del og den komplekse del på den rektangulære notationsform. Dette betyder, at strømmen I_2 er (fase)forskudt bagud i forhold til klemspændingen U, – hvilket er kendetegnede for en induktiv strøm.

Til ovenstående beregninger af strømmene er den polære notationsform anvendt, da den umiddelbart er den mest velegnede notationsform ved division af komplekse tal – se side 7.

Det skal lige nævnes, at den såkaldte watt-komposant I_{W1} samt den wattløse-komposant I_{WL1} for strømmen I_1 (jf. den traditionelle beregning på side 27) svarer henholdsvis til den reelle del og den komplekse del af strømmen I_1 noteret på den rektangulære form. Det samme gælder selvfølgelig også for strømmen I_2

$$I_1 = I_{W1} + j\,I_{WL1}$$

$$I_2 = I_{W2} - j\,I_{WL2}$$



Beregning af den samlede strøm I_{kreds}, som kredsen optager fra nettet:

Den samlede strøm I_{kreds} kan beregnes som en vektoriel sum af de to delstrømme I_1 og I_2. Til denne beregning vil den rektangulære notationsform være mest velegnet.

$$\vec{I}_{kreds} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

$$I_{kreds} = (7{,}96 + j\,6{,}33) + (25{,}22 - j\,31{,}69)$$

$$I_{kreds} = (7{,}96 + 25{,}22) + j\,(6{,}33 - 31{,}69)$$

$$I_{kreds} = 38{,}18 + j\,(-25{,}36)$$

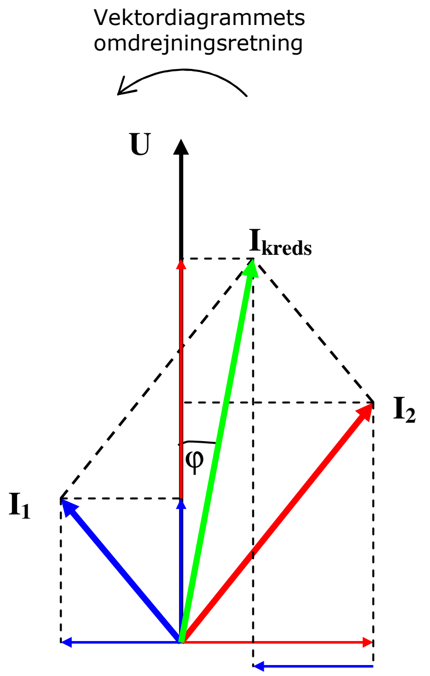
$$I_{kreds} = 38{,}18 - j\,25{,}36\ A$$

Omskrevet til polær notationsform (se side 8):

$$I_{kreds}\angle\varphi_{kreds} = 41{,}76\angle -37{,}39°\,A$$

Hvilket betyder at den samlede strøm I_{kreds}, der optages fra nettet er en induktiv strøm på 41,76 A samt at kredsens samlede faseforskydningsvinkel φ_{kreds} er 37,39°.

Det fremgår også af nedenstående (sted)vektordiagram over strømmene I_1, I_2 og I_{kreds} i forhold til klemspændingen U (vektordiagrammets omdrejningsretning er "venstre om").



Kildeangivelse

Internet leksikonet http://da.wikipedia.org

El-teori, El-fagets Uddannelsesnævn.

Elektroteknik 1, Elektricitet og magnetisme (Poul Erik Petersen), Bogfondens Forlag A/S 1993.

Komplekse tal, Hanne Østergaard, Ishøj Amtsgymnasium (2004).

Komplekse tal, Mogens Oddershede Larsen (2004).

Komplekse tal - en historisk og aksiomatisk introduktion (Jørgen Ebert), Forlaget Minor 1995.

Illustrationerne i kompendiet er udført med:

Microsoft Word

Macromedia Fireworks MX2004

GeoGebra (freeware program, som kan hentes her): http://www.geogebra.org/cms/)

Links

http://da.wikipedia.org/wiki/Kartesisk_koordinatsystem

http://da.wikipedia.org/wiki/Komplekse_tal

http://www.matnatverdensklasse.dk/uv-mat/cas/kompleks/index.htm

http://www.ugle.dk/kronik_wessel.html

Bilag 1

Facitliste til øvelsesopgaverne

Øvelsesopgaver med addition.

A.1. $z_1+z_2 = 9 + i10$
$z_1+z_2 = 13{,}45 \angle 48{,}01^\circ$

A.2. $z_3+z_4 = -1 + i6$
$z_3+z_4 = 6{,}08 \angle 99{,}46^\circ$

A.3. $z_5+z_6 = 2 - i6$
$z_5+z_6 = 6{,}32 \angle -71{,}57^\circ$

Øvelsesopgaver med subtraktion

S.1. $z_1-z_2 = -1 - i4$
$z_1-z_2 = 4{,}12 \angle -104{,}04^\circ$

S.2. $z_1-z_2 = 5 + i2$
$z_1-z_2 = 5{,}39 \angle 21{,}80^\circ$

S.3. $z_1-z_2 = -8 - i2$
$z_1-z_2 = 8{,}24 \angle -165{,}96^\circ$

Øvelsesopgaver med multiplikation

M.1. $z_1 = 5 \angle 53{,}13^\circ$
$z_2 = 8{,}60 \angle 54{,}46^\circ$
$z_1 * z_2 = 43{,}01 \angle 107{,}59^\circ$ $(-13 + i41)$

M.2. $z_3 = 4{,}47 \angle 63{,}43^\circ$
$z_4 = 3{,}61 \angle 146{,}31^\circ$
$z_3 * z_4 = 16{,}12 \angle -150{,}26^\circ$ $(-14 - i8)$

M.3. $z_5 = 5 \angle -126{,}87^\circ$
$z_6 = 5{,}39 \angle -21{,}80^\circ$
$z_5 * z_6 = 26{,}93 \angle -148{,}67^\circ$ $(-23 - i14)$

Øvelsesopgave med division

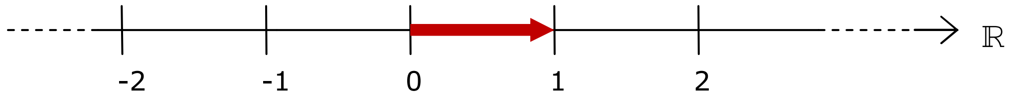
D.1. $z_1/z_2 = -0{,}381 - i0{,}238$
$z_1 = 9{,}43 \angle 32{,}01^\circ$
$z_2 = 7{,}62 \angle -66{,}80^\circ$
$z_1/z_2 = 0{,}45 \angle -147{,}99^\circ$

Bilag 2

Vedrørende den komplekse enhed i

De reelle tal kan alle vises på en vandret tallinje, der har enheden **1.** Der er såvel en negativ retning som en positiv retning, - disse er adskilt af 0 (nul).
Et vilkårligt tal (fx 5) er fremkommet som den grundlæggende enhed **1** gentaget fem gange (1+1+1+1+1 = 5 eller udtrykt som multiplikationen 5 · **1**= 5).

Hvis vi lader den reelle enhed **1** være repræsenteret af en stedvektor med længden 1 og vinklen 0° i forhold til den reelle tallinje, kan tegnes følgende skitse:



Den reelle enhed 1 kan skrives som:

$$\text{Enheden } \mathbf{1} = 1 \angle 0^\circ \text{ (polære notationsform)}$$

Hvis stedvektoren for den reelle enhed drejes 90° mod uret således, at den står vinkelret på den reelle talakse og vi samtidig vælger at lade den fremkomne stedvektor repræsentere enheden for en ny talakse vinkelret på den reelle talakse, får vi et koordinatsystem med alle *reelle* tal på x-aksen og de såkaldte *imaginære* tal på y-aksen (det komplekse koordinatsystem).
For at undgå forveksling mellem værdierne på de to talakser kaldes enheden på den imaginære y-akse for i. Alle tal på denne talakse får således "kendingsbogstavet" i.

Den imaginære enhed   kan nu skrives som:

$$i = 1 \angle 90^\circ$$

Dette er den polære notationsform, hvor vinklen er set i forhold til den reelle talakse.

På den rektangulære notationsform bliver det:

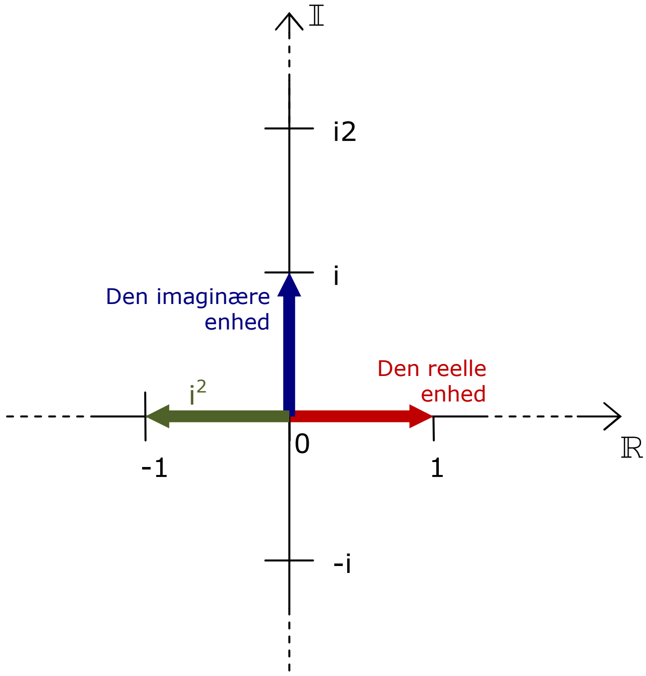
$$i = 0 + i1$$

Ved indførelsen af en ekstra talakse kan den reelle enhed **1** også skrives på rektangulær form:

$$\text{Enheden } \mathbf{1} = 1 + i\,0$$

Hvis den imaginære enhed i multipliceres med sig selv (kvadreres) fås:

$$i^2 = i \cdot i = 1\angle 90^\circ \cdot 1\angle 90^\circ = (1 \cdot 1)\angle(90^\circ + 90^\circ) = 1\angle 180^\circ$$



Hvilket svarer til den reelle værdi -1 (!)
Af dette følger:

$$i^2 = -1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{i^2} = \sqrt{-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$i = \sqrt{-1}$$

Det fremgår, at multiplikation med den imaginære enhed i svarer til en drejning af stedvektoren på 90° mod uret**.** Tilsvarende vil division med den imaginære enhed vil give en drejning på 90° med uret.

Denne side og næste er en samlet oversigt over beregningsmetoder til din notatmappe.

Notationsformer

Regne-operation	**Rektangulær notation** $z_1 = a_1 + ib_1$ $z_2 = a_2 + ib_2$	**Polær notation** $z_1 = z_1 \angle \varphi_1$ $z_2 = z_2 \angle \varphi_2$
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$	
Subtraktion	$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$	
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$	$z_1 \cdot z_2 = (\lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert) \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + i\left(\frac{(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right)$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$

Reciprok / den multiplikative inverse

Regne-operation	**Rektangulær notation** $z = a + ib$	**Polær notation** $z = z \angle \varphi$
Reciprok	$\frac{1}{z} = \frac{1 + i0}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ Værdierne for *a* og *b* indsættes med fortegn.	$\frac{1}{z} = \frac{1 \angle 0^\circ}{z \angle \varphi} = \frac{1}{\lvert z \rvert} \angle (-\varphi)$ Værdien for φ indsættes med fortegn.

Notationsformer for resistans, induktans og kapacitans

Resistans R	**Induktans** L	**Kapacitans** C
$\overline{Z} = R + j0$	$\overline{Z} = 0 + jX_L$	$\overline{Z} = 0 - jX_C$
$\overline{Z} = R \angle 0^\circ$	$\overline{Z} = X_L \angle 90^\circ$	$\overline{Z} = X_C \angle -90^\circ$

Rektangulær til polær notation

Beregning af *modulus* og *argumentet*

Er det komplekse tal z opgivet på *rektangulær* form $(z = a + ib)$, kan dets *modulus* og *argument* beregnes på følgende måde:

Modulus: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

	Argumentet ∠φ i grader	Argumentet ∠φ i radianer	Når værdierne for *a* og *b* er:	
1	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	a > 0	b ≠ 0
2	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + 180^\circ$	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + \pi$	a < 0	b ≥ 0
3	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) - 180^\circ$	$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) - \pi$	a < 0	b < 0
4	+ 90°	$\frac{\pi}{2}$	a = 0	b > 0
5	- 90°	$-\frac{\pi}{2}$	a = 0	b < 0
6	0°	0	a > 0	b = 0
7	0°	0	a = 0	b = 0